Un nouveau modèle d'énergie pour les champs aléatoires de Markov cachés

Jérémie Sublime*,** Younès Bennani**, Antoine Cornuéjols*

*AgroParisTech, INRA UMR MIA 518
16 rue Claude Bernard, F-75231 Paris Cedex 5, France
jeremie.sublime@agroparistech.fr, antoine.cornuejols@agroparistech.fr,
**Université Paris 13 - Sorbonne Paris Cité
Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord - CNRS UMR 7030
younes.bennani@lipn.univ-paris13.fr

Résumé. Dans cet article, nous proposons un nouveau modèle d'énergie pour les champs aléatoires de Markov cachés (HMRF: Hidden Markov Random Fields) s'appuyant sur une modélisation par HMM (Hidden Markov Models) et évitant ainsi l'utilisation d'un paramètre clé de compromis choisi de façon empirique.

1 Introduction

Les champs aléatoires de Markov (MRF) sont des modèles graphiques probabilistes qui combinent des connaissances a priori données par des observations, et des connaissances issues des contraintes de voisinage. Ces modèles markoviens permettent de prendre en compte les dépendances explicites entre des données. Dans les cas de données d'imagerie, ces dépendances sont les relations de voisinage spatial unissant des pixels ou des segments proches (ensembles de pixels) et sont représentées sous forme d'un graphe non-orienté. Il a été montré en imagerie que l'ajout de ces informations spatiales lors du processus de segmentation permet d'améliorer le résultat global, Hernández-Gracidas et Sucar (2007).

Par ailleurs, les modèles de Markov cachés (HMM), sont des modèles probabilistes dans lesquels un ensemble interconnecté de variables aléatoires à valeurs dans l'espace des états $S = \{s_1, ..., s_N\}$,$s_i \in 1..K$ émettent des observations $X = \{x_1, ..., x_N\}$ où les x_i sont des vecteurs contenant les attributs de chaque observation. L'objectif est alors de déterminer la valeur des s_i pour obtenir la segmentation.

Les champs aléatoires de Markov cachés (HMRF) sont une application des modèles de Markov cachés au cas particulier de la structure de dépendance des champs aléatoires de Markov. Ce modèle est très fréquemment utilisé pour segmenter des données d'imagerie, Zhang et Ji (2010), Roth et Black (2011).

Afin d'inférer les $s_i \in 1..K$ pour déterminer à quel cluster appartient chaque donnée, on utilise généralement le critère de maximum a posteriori (MAP) et on cherche alors S tel que :

$$S = \arg\max_S (P(X|S, \Theta)P(S)) \tag{1}$$

La méthode la plus courante pour maximiser $P(X|S, \Theta)P(S)$ est d'utiliser le couple HMRF-EM, Zhang et al. (2001), pour faire la segmentation en deux étapes :

- Recherche de Θ et maximisation de $P(X|S,\Theta)$ avec l'algorithme Expectation Maximization 'EM', Dempster et al. (1977).
- Optimisation de $S = \arg\max_S(P(X|S,\Theta)P(S))$ à Θ fixé avec l'algorithme ICM 'Iterated Conditional Modes', Besag (1986).

En pratique, on s'intéressera à optimiser localement le logarithme de $P(x|s,\theta_s)P(s)$. L'algorithme ICM consiste alors à minimiser une fonction d'énergie de forme :

$$U(s,x) = U_{obs}(s,x,\theta_s) + \beta \sum_{v \in V} U_{vois}(s_v, s) \tag{2}$$

U_{obs} est obtenue à partir des observations émises par les données et U_{vois} dépend de la représentation choisie pour les voisinages. Dans les actuelles versions de l'algorithme HMRF-EM, la fonction d'énergie de voisinage U_{vois} est généralement simple : une fonction indicatrice (ou delta de Kronecker), et les résultats dépendent fortement du choix de la constante β.

Notre objectif ici est de proposer un modèle alternatif, avec une fonction d'énergie de voisinage plus complexe et qui permet de ne pas avoir besoin d'utiliser la constante empirique β tout en conservant des résultats de bonne qualité.

2 Algorithme HMRF-EM amélioré

2.1 Notations

Dans cette section, on considère des états $S = \{s_1, ..., s_N\}$,$s_i \in 1..K$ qui émettent des observations $X = \{x_1, ..., x_N\}$ où les x_i sont des vecteurs de dimension d. On suppose que l'émission des x_i par les états peut être modélisée par une loi normale, par conséquent, on notera $\theta_s = \{\mu_s, \Sigma_s\}$ les paramètres de la loi normale associée l'état s, où μ_s représente le vecteur moyen de l'état s et Σ_s sa matrice de covariance. On notera V_x l'ensemble des voisins d'une observation x, et $|V_x|$ son cardinal : le nombre de voisins de x.

De plus, on notera Z la constante de normalisation ou fonction de partition servant à normaliser les probabilités.

2.2 Modèle d'énergie proposé

Le modèle HMM propose un formalisme intéressant renseignant les voisinages sous la forme d'une matrice de transition $A = \{a_{i,j}\}$ ou les $a_{i,j}$ représentent la probabilité de passer du label i au label j entre deux voisins. C'est ce même formalisme que nous proposons d'utiliser pour décrire l'énergie de voisinage. En prenant une loi d'émission gaussienne pour $P(x|s,\theta_s)$, on a alors le résultat suivant :

$$P(x|s,\theta_s)P(s) = P(x|s,\theta_s) \times \prod_{v \in V_x} P(s|s_v) = \frac{1}{Z} \times \mathcal{N}(\mu_s, \Sigma_s, x) \times \prod_{v \in V_x} a_{s_v,s}^{\frac{1}{|V_x|}} \tag{3}$$

Pour maximiser l'expression donnée dans l'équation (3), nous proposons minimiser l'énergie décrite dans l'équation (4), elle-même obtenue à partir du logarithme de l'équation (3).

$$U_{HMRF}(s,x) = \frac{|\mu_s - x|^2}{\Sigma_s} + log(\sqrt{|\Sigma_s|(2\pi)^d}) - \sum_{v \in V_x} \frac{log(a_{s_v,s})}{|V_x|} \quad (4)$$

2.3 Algorithme proposé

La difficulté principale de l'approche proposée est d'évaluer la matrice A. En effet, sans connaissance extérieure sur les clusters, les probabilités de passage d'un état à un autre sont inconnues. Il est cependant possible d'approcher ces valeurs en observant les voisinages a posteriori après chaque itération du couple HMRF-EM avec l'équation (5), la loi des grands nombres assurant la fiabilité des résultats. Cette méthode est décrite dans l'Algorithme (1).

$$a_{i,j} = \frac{Nombre\ de\ transitions\ de\ i\ vers\ j}{Nombre\ de\ transitions\ partant\ de\ i} = \frac{Card(c_{q,r} \in C | q = i \,\&\, r = j)}{Card(c_{q,r} \in C | q = i)} \quad (5)$$

Le fait que nous utilisions une matrice de transition plutôt qu'une constante, nous permet d'avoir des pénalités de transition plus précises et donc de mieux détecter les données mal étiquetées lors des itérations précédentes. En effet, notre modèle autorise jusqu'à K^2 valeurs pour les pénalités, contre seulement 2 (0 ou β) pour les modèles d'énergie classiques.

En termes de temps de calcul notre algorithme prend en moyenne deux fois plus de temps que l'algorithme HMRF-EM classique, les données étant parcourues deux fois au lieu d'une seule : une fois pour l'optimisation de l'énergie, et une fois pour mettre à jour A.

Algorithme 1 : EM+ICM avec mise à jour d'une matrice de transition

Initialiser S et Θ avec l'aglorithme EM
Initialiser A avec l'equation (5)
while *l'algorithme n'a pas convergé* **do**
    Minimiser $U_{HMRF}(s,x)$ telle que défini dans l'équation (4)
    Mettre à jour A en fonction de la nouvelle distribution S en utilisant (5)
end

Pour notre algorithme, nous avons choisi le critère d'arrêt suivant. Nous arrêtons les itérations de l'ICM lorsque : (1) Le nombre de modifications de S d'une itération à une autre est faible ou nul, ou (2) la somme des énergies sur l'ensemble de l'image atteint un minimum local, ou (3) un nombre maximal d'itérations a été dépassé.

3 Expériences

Dans cette section, nous présentons les résultats des expériences préliminaires que nous avons réalisées pour tester notre modèle. Nous avons voulu évaluer la qualité des résultats obtenus avec notre fonction d'énergie définie dans l'équation (4) par rapport aux autres modèles d'énergie courants. Pour cela, nous avons testé plusieurs algorithmes sur deux images pour laquelle les segmentations réelles étaient connues.

En observant les résultats de l'expérience sur la première image dans le Tableau (1), on constate que la qualité de la segmentation obtenue par notre HMRF modifié est dans la moyenne haute comparée aux résultats des autres algorithmes. En particulier, on notera des résultats presque identiques à ceux du modèle MRF classique avec un β optimal. Pour autant, notre approche donne ici de meilleurs résultats visuels (Cf. Figure (1)), et présente l'avantage d'avoir des bases plus solides et de ne pas reposer sur des choix de paramètres empiriques.

FIG. 1 – *De gauche à droite : Image originale, segmentation à la main utilisée comme segmentation optimale, notre segmentation HMRF, segmentation MRF classique. Format de l'image : 404 par 476, soit 192304 pixels*

	Taux de pureté des clusters	Variance interne	Plus petite classe	Plus grande classe
HMRF amélioré	78.13%	2.03676	14432	52037
MRF GMM ($\beta = 2/3$)	78.30%	2.14439	1618	64587
MRF GMM ($\beta = 1$)	75.46%	2.23388	1664	76612
ICM basique ($\beta = 2/3$)	75.74%	2.31337	5127	45229

TAB. 1 – *Taux de pureté, variance moyenne et valeurs extrêmes des cardinaux des clusters.*

Ci-dessous, les résultats de la même expérience réalisée sur une autre image :

FIG. 2 – *De gauche à droite : Image originale* 481×321 *pixels, une segmentation MRF GMM classique, une segmentation avec notre modèle d'énergie, une segmentation avec un ICM utilisant le modèle basique de Potts.*

Les résultats montrés dans la Figure (2) et le tableau (3) montrent à nouveau que notre modèle permet d'obtenir des résultats au moins aussi bon que ceux de modèles plus classiques pour lesquels une valeur optimale de β est utilisée.

De plus, notre méthode semble efficace pour regrouper les pixels en zones similaires tout en maintenant une faible variance interne pour les clusters, ce qui prouve que les zones formées ont du sens.

	Taux de pureté	Variance interne
ICM basique ($\beta = 2/3$)	73.42%	6.10
ICM basique ($\beta = 1$)	73.38%	6.13
MRF GMM ($\beta = 2/3$)	69.37%	5.83
MRF GMM ($\beta = 2/3$)	69.36%	5.84
HMRF amélioré	73.46%	5.86

TAB. 2 – *Taux de pureté des clusters et variance interne moyenne (3 clusters).*

Le tableau (3) donne les temps de calcul des différents algorithmes testés dans les expériences précédentes et confirme que notre algorithme est un peu plus lent. Ce temps de calcul supplémentaire est très nécessairement du à la mise à jour de la matrice de transition A qui exige de parcourir l'ensemble des pixels deux fois au lieu d'une à chaque itération.

	$404 \times 476px$ 4 clusters	$380 \times 270px$ 4 clusters	$1131 \times 575px$ 4 clusters
ICM basique	4451ms	2453ms	13370ms
MRF GMM	4933ms	2717ms	14771ms
HMRF amélioré	6632ms	3418ms	20810ms

TAB. 3 – *Temps de calcul en ms, Intel Core I5-3210M, 2.5GHz.*

4 Conclusion

Nous avons proposé une amélioration du modèle des champs aléatoires de Markov cachés (HMRF) par l'utilisation d'une matrice de transition dans les formules d'énergie, permettant d'éviter l'utilisation d'un paramètre empirique. Les expériences préliminaires ont montré que notre modèle donnait des résultats compétitifs par rapport à ceux obtenus avec les modèles d'énergie standards.

Notre modèle ouvre également des perspectives intéressantes pour envisager des versions collaboratives des modèles de champs aléatoires de Markov cachés. En effet, en stockant les informations sur les voisinages dans une matrice, il est alors possible de transmettre cette information à un autre algorithme ce qui n'est pas le cas avec les autres modèles d'énergie.

References

Besag, J. (1986). On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B 48*(3), 259–302.

Dempster, A. P., N. M. Laird, et D. B. Rubin (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B 39*(1), 1–38.

Hernández-Gracidas, C. A. et L. E. Sucar (2007). Markov random fields and spatial information to improve automatic image annotation. In D. Mery et L. Rueda (Eds.), *PSIVT*, Volume 4872 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 879–892. Springer.

Roth, S. et M. J. Black (2011). Fields of experts. In A. Blake, P. Kohli, et C. Rother (Eds.), *Markov Random Fields for Vision and Image Processing*, pp. 297–310. MIT Press.

Zhang, L. et Q. Ji (2010). Image segmentation with a unified graphical model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 32*(8), 1406–1425.

Zhang, Y., M. Brady, et S. M. Smith (2001). Segmentation of brain mr images through a hidden markov random field model and the expectation maximization algorithm. *IEEE Trans. Med. Imaging 20*(1), 45–57.

Summary

In this paper we introduce a new energy model for the Hidden Markov Random Field (HMRF) based on the Hidden Markov Model (HMM) formalism and aimed at avoiding the use of a key parameter chosen empirically.